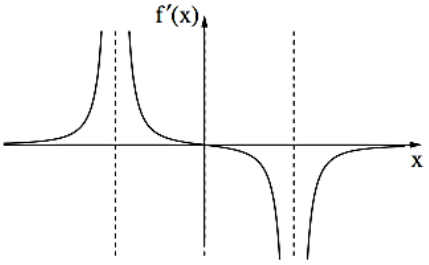
سؤال 6 دالة كسرية – 471 – شتاء 2024

6. الدالّة $f(x)$ معرَّفة في المجال $x \neq \pm 4$.

الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ ، المعرَّفة في نفس المجال.



الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ يقطع المحور x في النقطة $(0,0)$ فقط.

أ. جدوا الإحداثيّ x للنقطة القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقطة.

ب. جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالّة $f(x)$.

معطى أنّ للدالّة $f(x)$ يوجد خطّ تقارب أفقيّ معادلته هي $y = 2$.

أحد التعابير I–III التي أمامكم يُمثِّل الدالّة $f(x)$.

I. $\frac{x^2}{x^2+16}+1$ **II.** $\frac{x^2}{x^2-16}+2$ **III.** $\frac{x^2}{x^2-16}+1$

جـ. حدِّدوا أيّ تعبير من التعابير I–III يُمثِّل الدالّة $f(x)$. علِّلوا تحديدكم.

د. جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحورين.

هـ. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

و. احسبوا المساحة المحصورة بين الرسم البيانيّ لدالّة المشتقّة $f'(x)$ والمحور x والمستقيم $x = 2$.

أ. { جدوا الاحداثي x للنقطة القصوى للدالة $f(x)$ وحددوا نوعها }

النقطة الصفرية في دالة المشتقة هي نقطة حرجة في الدالة الاصلية.

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

عندما تكون $f'(x)$ موجبة (فوق محور x)، تكون $f(x)$ تصاعدية.

عندما تكون $f'(x)$ سالبة (تحت محور x)، تكون $f(x)$ تنازلية.

$$\Downarrow$$

النقطة max

$$x_{max} = 0$$

ب. جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $f(x)$

x		-4		0		4	
$f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$+$		$-$	$\emptyset$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

تصاعد: $x < -4$, $-4 < x < 0$

تنازل: $x > 4$, $0 < x < 4$

ج. حددوا أي من التعابير يمثل الدالة $f(x)$

نجد خطوط التقارب الافقية في الدوال المعطاة:

$$\text{I}: \frac{1}{1} + 1 = 2$$

$$\text{II}: \frac{1}{1} + 2 = 3$$

$$\text{III}: \frac{1}{1} + 1 = 2$$

$$\Downarrow$$

نرى انه يوجد للمعادلة III و I محاذية افقية مساوية لـ 2

نفحص مجال تعريف الدالتين:

I :

$$x^2 + 16 \neq 0$$

$$x^2 \neq -16$$

$$x \in \mathbb{R}$$

III :

$$x^2 - 16 \neq 0$$

$$x^2 \neq 16$$

$$x \neq \pm 4$$

التعبير III يمثل الدالة $f(x)$

وذلك لأنه يتحقق بالدالة III ان خط التقارب الافقي هو $y = 2$ ويتلاءم مع مجال التعريف المعطى بالسؤال.

د. احداثيات تقاطع الدالة $f(x)$ مع المحورين

<u>تقاطع مع محور x:</u>

$$f(x) = 0$$

$$0 = \frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$$

$$0 = x^2 + x^2 - 16$$

$$2x^2 = 16$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$(\sqrt{8}, 0)\ (-\sqrt{8}, 0)$$

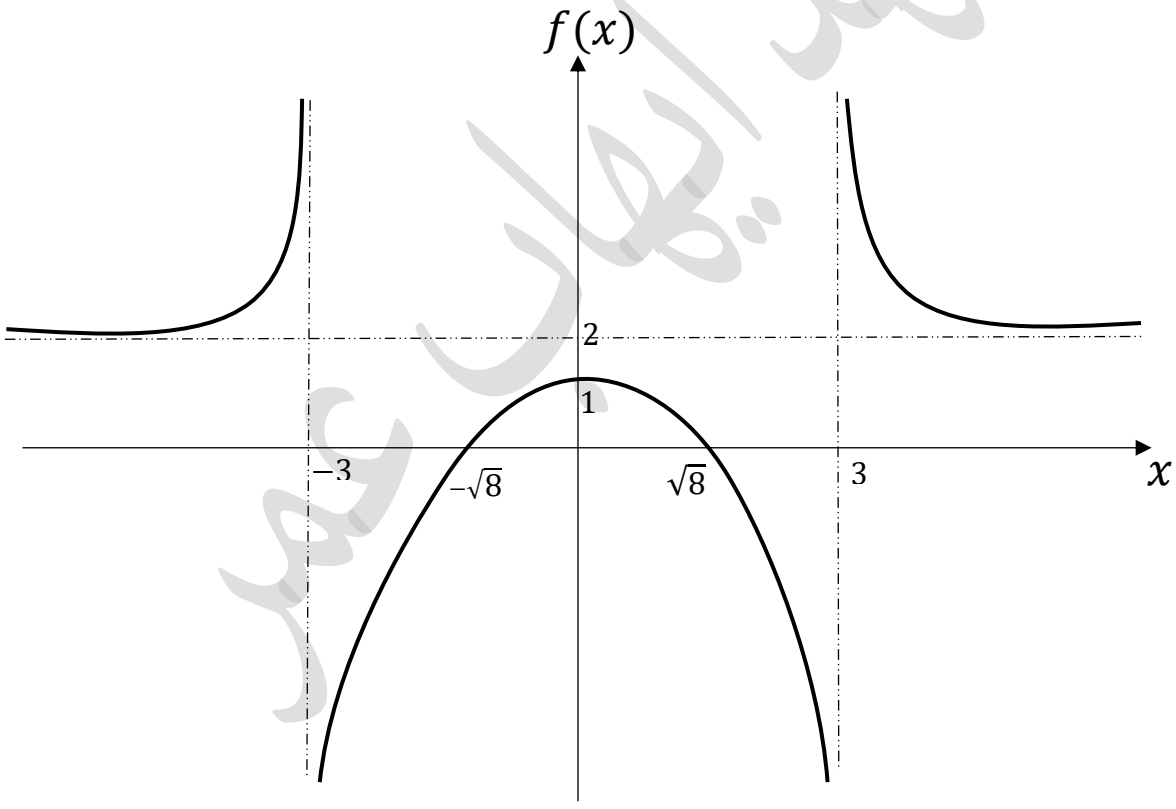
تقاطع مع محور y:

$$f(0) = \frac{0}{0-16} + 1$$

$$f(0) = 1$$

$$(0,1)$$

هـ. رسم بياني تقريبي للدالة $f(x)$



معهد إيهاب عمر

و. حساب المساحة المطلوبة

$$-\int_0^2 f'(x)dx = -f(x)|_0^2 = -\big(f(2) - f(0)\big)$$

نضرب التكامل بسالب
لأن محور x يحد
المساحة من الأعلى

$$= -\left(\frac{2}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

معهد إيهاب عمر