سُؤال 1 :

معطاة دائرتان تمسّ إحداهما الأخرى من الخارج.

مركز إحدى الدائرتين هو في النقطة M ومعادلتها هي $(x-a)^2+y^2=r^2$ ، a هو بارامتر موجب.

مركز الدائرة الأخرى هو في النقطة N ومعادلتها هي $(x-13)^2+y^2=R^2$.

طول القطعة التي تصل بين مركزَي الدائرتين هو 9 ، والنسبة بين طولَي نصفَي قطر الدائرتين هي 1:2 ، $r<R$.

أ. جدوا معادلة الدائرة التي مركزها N والإمكانيّتين لمعادلة الدائرة التي مركزها M .

معطى أنّ $a<13$.

ب. ارسموا في هيئة محاور واحدة، رسمًا تقريبيًّا للدائرتين ولجميع المماسّات المشتركة للدائرتين.

جـ. جدوا معادلة المماسّ الذي يمرّ في النقطة المشتركة للدائرتين.

د. المستقيم $mx-y+n=0$ هو مماسّ مشترك للدائرتين. جدوا m وَ n (الإمكانيّتين).

معطاة دائرتان أخريان تمسّ إحداهما الأخرى من الخارج.

معادلتا الدائرتين هما: $(x-t)^2+y^2=r^2$ ؛ $(x-k)^2+y^2=R^2$ ، t وَ k هما بارامتران.

قيمتا نصفَي القطر r وَ R مساويتان لِلَّتين وجدتموهما في البند "أ".

هـ. هل يمكن أنّ المستقيمين اللذين وجدتم معادلتَيْهما في البند "د" يمسّان أيضًا هاتين الدائرتين؟

إذا كانت إجابتكم نعم – جدوا t وَ k. إذا كانت إجابتكم لا – علِّلوا.

أ)

النسبة بين طُولَيْ نصفَيْ قُطر الدائرتين هي 1 : 2

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{r}=\frac{2}{1} \quad \rightarrow \quad \frac{R}{r}=2 \quad \rightarrow \quad \boxed{R=2r}$$

طول القطعة التي تصل بين مركزي الدائرة هُو 9

$$\Downarrow$$

$$R+r=9$$

$$R=2r \Downarrow$$

$$2r+r=9$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$3r = 9$$

$$\div 3 \Downarrow$$

$$\boxed{r = 3}$$

$$R = 2r$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = 6}$$

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2 \qquad (x-13)^2 + y^2 = R^2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

مركز الدائرة : $M(a,0)$ مركز الدائرة : $N(13,0)$

طول القطعة التي تصل بين مركزي الدائرتين هُو 9

$$\Downarrow$$

$$MN = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(a-13)^2 + (0-0)^2} = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(a-13)^2} = 9$$

معهد إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$(a-13)^2 = 81$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 - 26a + 169 = 81$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 - 26a + 88 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(a-22)\cdot(a-4) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = 22}$$

$$\boxed{a = 4}$$

- مُعادلة الدائرة التي مركزها N :

$$\boxed{(x-13)^2 + y^2 = 36}$$

- مُعادلة الدائرة التي مركزها M :

1 امكانيَّة - $\boxed{(x-4)^2 + y^2 = 9}$

2 امكانيَّة - $\boxed{(x-22)^2 + y^2 = 9}$

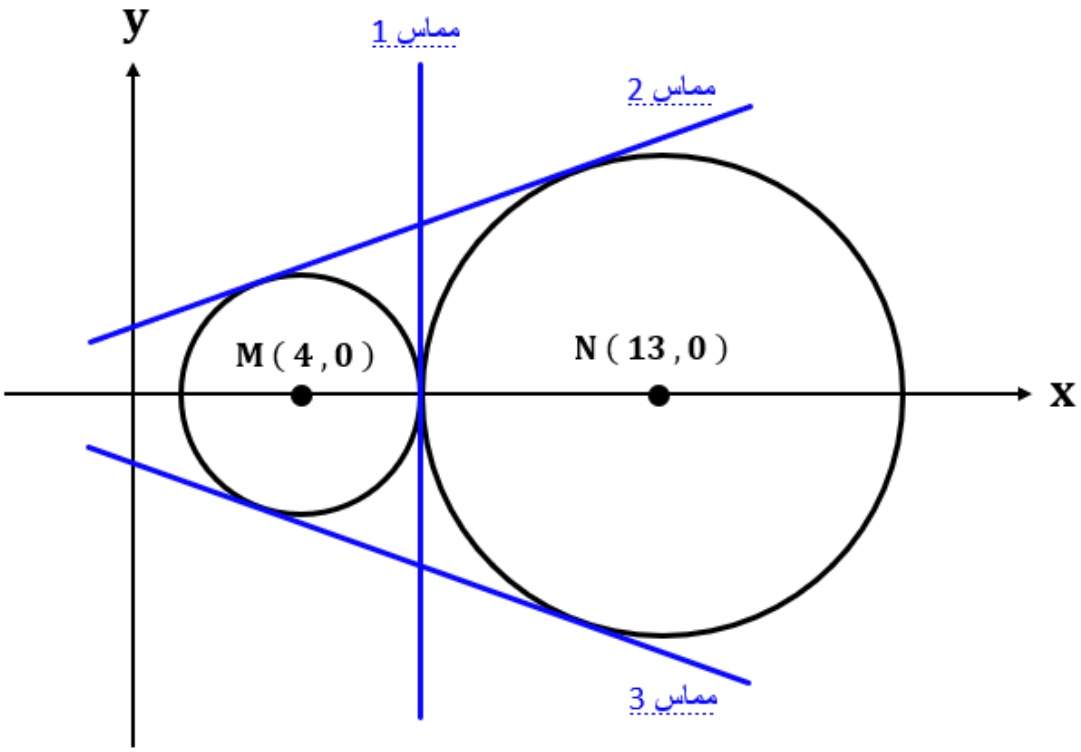
معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

ب)

$$(x-13)^2+y^2=36$$

$$(x-4)^2+y^2=9$$



ج)

النُقطة المُشتركة للدائرتين تقع على المحور x , وهي تبُعد عن المركز N بمقدار 6 خُطوات $(R=6)$
وتبعُد عن المركز M بمقدار 3 خُطوات $(r=3)$

$$\Downarrow$$

النُقطة المُشتركة : $(7,0)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x=7}$$

جواب نهائي

إيهاب عمر

د)

$$mx - y + n = 0$$

بُعد المركز $N(13, 0)$ عن المماس المُشترك يُساوي 6

$$\Downarrow$$

$$\frac{|m \cdot 13 - 1 \cdot 0 + n|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 6$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|13m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 6$$

$$\cdot\sqrt{m^2 + 1} \Downarrow$$

مُعادلة 1 - $$|13m + n| = 6\sqrt{m^2 + 1}$$

بُعد المركز $M(4, 0)$ عن المماس المُشترك يُساوي 3

$$\Downarrow$$

$$\frac{|m \cdot 4 - 1 \cdot 0 + n|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|4m + n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$$

$$\cdot\sqrt{m^2 + 1} \Downarrow$$

$$|4m + n| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\cdot 2 \Downarrow$$

مُعادلة 2 - $$2 \cdot |4m + n| = 6\sqrt{m^2 + 1}$$

معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

① $|13m+n| = 6\sqrt{m^2+1}$

② $2\cdot|4m+n| = 6\sqrt{m^2+1}$

① – ② $|13m+n| - 2\cdot|4m+n| = 6\sqrt{m^2+1} - 6\sqrt{m^2+1}$

$$\Downarrow$$

$$|13m+n| - 2\cdot|4m+n| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$|13m+n| = 2\cdot|4m+n|$$

$13m+n = -2\cdot(4m+n)$

$13m+n = 2\cdot(4m+n)$

$13m+n = -2\cdot(4m+n) \longrightarrow 13m+n = -8m-2n \longrightarrow 21m+3n = 0$

$\longrightarrow 7m+n = 0 \longrightarrow \boxed{n = -7m}$

- نُعوّض $n = -7m$ بالمُعادلة 2 :

$$2\cdot|4m-7m| = 6\sqrt{m^2+1}$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot|-3m| = 6\sqrt{m^2+1}$$

تربيع الطرفين $\Downarrow$

$$2\cdot 9m^2 = 36(m^2+1)$$

$$\Downarrow$$

$$18m^2 = 36m^2 + 36$$

معهد إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$18m^2 + 36 = 0$$

$$\div 18 \Downarrow$$

$$m^2 + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m^2 = -2$$

$$\emptyset$$

$$13m + n = 2 \cdot (4m + n) \longrightarrow 13m + n = 8m + 2n \longrightarrow 5m - n = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{n = 5m}$$

- نُعوّض $n = 5m$ بالمُعادلة 2 :

$$2 \cdot |4m + 5m| = 6\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Downarrow$$

$$2 \cdot |9m| = 6\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{تربيع الطرفين} \Downarrow$$

$$4 \cdot 81m^2 = 36(m^2 + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$324m^2 = 36m^2 + 36$$

$$\Downarrow$$

$$288m^2 = 36$$

$$\div 36 \Downarrow$$

$$8m^2 = 1$$

$\div 8 \Downarrow$

$$m^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \longrightarrow \quad n = 5m \quad \longrightarrow \quad n = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \longrightarrow \quad n = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \longrightarrow \quad n = 5m \quad \longrightarrow \quad n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \quad \longrightarrow \quad n = -\frac{5}{\sqrt{8}}$$

امكانيَّة 1:

$$m = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad , \quad n = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

امكانيَّة 2:

$$m = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad , \quad n = -\frac{5}{\sqrt{8}}$$

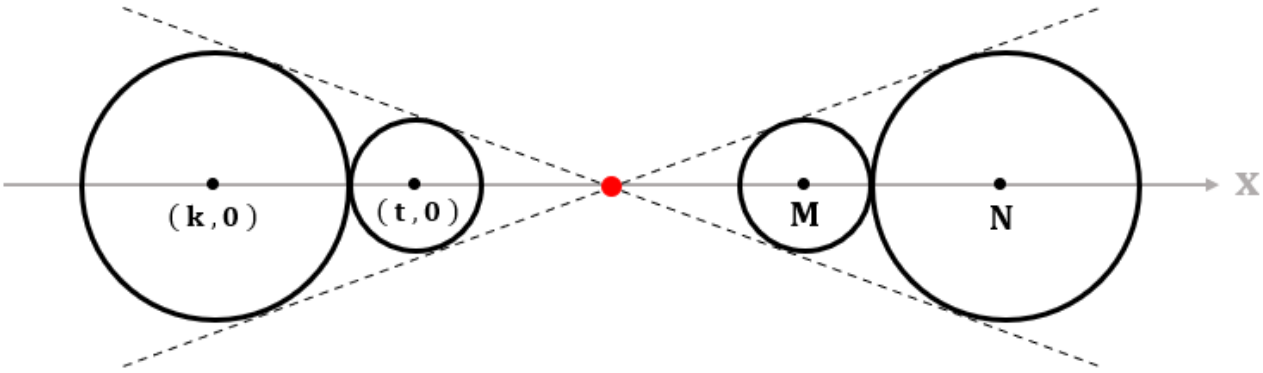
معهد إيهاب عمر

إيهاب عمر

ه)

نعم .

ينتُج من التناظُر:



✓ نُقطة تقاطُع المُستقيمين تبعُد عن النُقطة M بنفس مقدار بُعدها عن (t , 0) و تبعُد عن النُقطة N بنفس مقدار بُعدها عن النُقطة (k , 0) .

نجد نُقطة تقاطُع المُستقيمين :

- مُستقيم 1 : $\frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0$
- مُستقيم 2 : $-\frac{1}{\sqrt{8}}x - y - \frac{5}{\sqrt{8}} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - y - \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}x + \frac{5}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{5}{\sqrt{8}}$$

إيهاب عمر

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}}x = -\frac{10}{\sqrt{8}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{8}}{2} \Downarrow$$

$$\boxed{x = -5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot (-5) - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{5}{\sqrt{8}} - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0$$

$$\rightarrow \quad -y = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{نُقطة التقاطُع} : \ (-5\ ,0\ )}$$

$$x_M - (-5) = -5 - t$$

$$\Downarrow$$

$$4 + 5 = -5 - t$$

$$\Downarrow$$

$$9 = -5 - t$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t = -14}$$

$$x_N - (-5) = -5 - k$$

$$\Downarrow$$

$$13 + 5 = -5 - k$$

$$\Downarrow$$

$$18 = -5 - k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k = -23}$$

معهد إيهاب عمر