متواليات صيف 2015

سؤال اثنين :

معطاة متوالية هندسيّة لانهائيّة تنازليّة جميع حدودها موجبة: $a_1 , a_2 , a_3 ,\dots, a_n ,\dots$.
كلّ حدّ في هذه المتوالية (باستثناء الحدّ الأوّل) هو $\frac{2}{5}$ مجموع الحدّين المجاورين له؛ الحدّ الذي قبله والحدّ الذي بعده.

أ. جد أساس المتوالية a_n .

ب. معطاة المتوالية $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) برهن أنّ المتوالية b_n هي متوالية هندسيّة.

(2) مجموع عشرة الحدود الأولى في المتوالية b_n هو 20,460 .
جد مجموع كلّ حدود المتوالية a_n .

أ)

$$a_{n+1} = (a_n + a_{n+2}) \cdot \frac{2}{5} \quad \text{(معطى)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \cdot q = (a_n + a_n \cdot q^2) \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \cdot q = a_n(1 + q^2) \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{a_n} \cdot q = \cancel{a_n}(1 + q^2) \cdot \frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$q = (1+q^2)\cdot\frac{2}{5}$$

$$\Downarrow \cdot 5$$

$$5q = 2\cdot(1+q^2)$$

$$\Downarrow$$

$$5q = 2 + 2q^2$$

$$\Downarrow$$

$$2 + 2q^2 - 5q = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2q-1)\cdot(q-2) = 0$$

$$q = \frac{1}{2} \qquad q = 2$$

بما أنَّ المتواليَة a_n هي متواليَة تنازليَّة موجبة , فهذا يعني أنَّ $q = \frac{1}{2}$

ب) (1)

لنُبرهن أنَّ متواليَة ما هي متواليَة هندسيَّة , يجب أن يتحقَّق الشرط أنَّ النسبة بين كل حدين متتابعين هي نسبة ثابتة بالتلائُم .

بما معناه , يجب أن يتحقَّق أنَّ :

$$\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{عدد ثابت} \right)$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2} \quad \text{(معطى)}$$

نستنتج أنَّ ,

$$b_{n+1} = \frac{a_{(n+1)+1}}{(a_{n+1})^2}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{(n+1)+1}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{(a_n)^2}{a_{n+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \underbrace{\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{q} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{a_{n+1}}}_{\frac{1}{q}} \cdot \underbrace{\frac{a_n}{a_{n+1}}}_{\frac{1}{q}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q}{q^2}$$

$\boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$ $\Downarrow$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$$

(2)

معطى: مجموع عشرة حدود الأولى في المتواليَة b_n هو 20460

$$\Downarrow$$

$$20460 = \frac{b_1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

قانون حساب مجموع متواليَة هندسيَّة:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$20460 = b_1 \cdot (2^{10} - 1)$$

$$\Downarrow$$

$$20460 = b_1 \cdot 1023$$

$$\div 1023 \quad \Downarrow$$

$$b_1 = 20$$

$$b_1 = \frac{a_2}{(a_1)^2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \quad \Downarrow$$

$$b_1 = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{2}}{(a_1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{2}}{a_1}$$

$$b_1 = 20 \quad \Downarrow$$

$$20 = \frac{\frac{1}{2}}{a_1}$$

$$\Downarrow$$

$$20 \cdot a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\div 20 \quad \Downarrow$$

$$a_1 = \frac{1}{40}$$

الان، نحسب مجموع المتواليَة a_n عن طريق قانون حساب مجموع متوالية لانهائيَّة متقاربة:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

$$S = \frac{\frac{1}{40}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S = \frac{1}{20}}$$