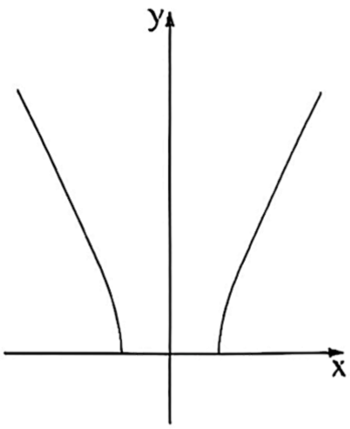
قيم قصوى – صيف 2026

8 الرسم الذي أمامكم يصف الرسم البيانيّ للدالّة $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 4}$.

معطى المستقيم $y = 3x - 6$.



أ. جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

ب. جدوا إحداثيّات نقطتَي تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المستقيم المعطى.

النقطة A تقع على الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ في المجال الذي بين النقطتَيْن اللتَيْن وجدتموهما في البند "ب".

عَبْرَ النقطة A مرِّروا مستقيمَيْن:

مستقيمًا يوازي المحور y ، ويقطع المستقيم المعطى في النقطة B .

مستقيمًا يوازي المحور x ، ويقطع المستقيم المعطى في النقطة C .

نرمز بِـ t إلى الإحداثيّ x للنقطة A .

جـ. **(1)** عبِّروا بدلالة t عن طول القطعة AB .

(2) عبِّروا بدلالة t عن طول القطعة AC .

د. جدوا قيمة t التي بالنسبة لها يكون مجموع طولَي القطعتَيْن AB وَ AC أكبر ما يمكن.

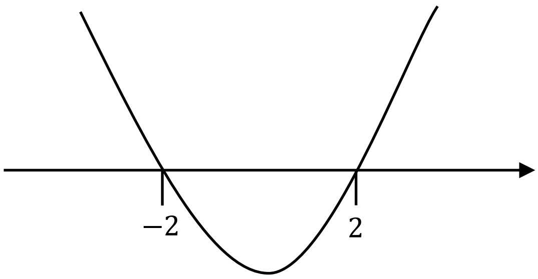
أ. نجد مجال تعريف الدالّة $f(x)$

$$f(x) = 2\sqrt{x^2-4}$$

$$x^2-4 \geq 0$$

$$x^2-4 = 0$$

$$x = \pm 2$$



حسب الرّسم:

$x \geq 2$ أو $x \leq -2$

ب. نجد إحداثيّات نقطتي تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المستقيم المُعطى

المستقيم المعطى: $y = 3x-6$

$$2\sqrt{x^2-4} = 3x-6 \quad \backslash(\,)^2$$

$$4(x^2-4) = (3x-6)^2$$

$$4x^2-16 = 9x^2-36x+36$$

$$5x^2-36x+52 = 0$$

انتبهوا، يجب فحص الإجابات عندما نقوم بتربيع الجذر!

$x = \frac{26}{5}$ ، $x = 2$

$$2\sqrt{(2)^2-4} = 3(2)-6$$

$$0 = 0$$

صحيح

$$2\sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2-4} = 3\left(\frac{26}{5}\right)-6$$

$$\frac{48}{5} = \frac{48}{5}$$

صحيح

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{26}{5},\frac{48}{5}\right) \text{ ، } (2,0)$$

ج. (1) نعبّر بدلالة t عن طول القطعة AB

معطى أنّ النقطة A تقع على الرّسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ بين النقطتين اللتان وجدناهما في البند السابق.

ورمزنا في السؤال إلى الإحداثيّ x للنقطة A بـ t

$$f(t) = 2\sqrt{t^2 - 4}$$

$$A\left(t, 2\sqrt{t^2 - 4}\right)$$

نجد المستقيم AB وهو المستقيم الذي يوازي المحور y:

$$AB = x_A = t$$

نجد النّقطة B:

معطى أنّ المستقيم الذي يوازي المحور y يقطع المستقيم $y = 3x - 6$ في النقطة B:

$$x_B = x_A = t$$

$$y_B = 3t - 6$$

طول القطعة AB هو الفرق بين إحداثي y للنقطة A والإحداثي y للنقطة B:

$$AB = y_A - y_B = 2\sqrt{t^2 - 4} - (3t - 6)$$

$$AB = 2\sqrt{t^2 - 4} - 3t + 6$$

ج. (2)   نعبّر بدلالة t عن طول القطعة AC

$$A\left(t, 2\sqrt{t^2-4}\right)$$

نجد المستقيم AC وهو المستقيم الذي يوازي المحور x:

$$AC = y_A = 2\sqrt{t^2-4}$$

نجد النّقطة C:

معطى أنّ المستقيم الذي يوازي المحور x يقطع المستقيم $y = 3x - 6$ في النقطة C:

$$y_C = y_A = 2\sqrt{t^2-4}$$

نجد x_C:

$$2\sqrt{t^2-4} = 3x_C - 6$$

$$6 + 2\sqrt{t^2-4} = 3x_C$$

$$x_C = \frac{6 + 2\sqrt{t^2-4}}{3}$$

طول القطعة AC هو الفرق بين إحداثي x للنقطة C والإحداثي x للنقطة A:

$$AC = x_C - x_A = \frac{6 + 2\sqrt{t^2-4}}{3} - t$$

$$AC = \frac{6 + 2\sqrt{t^2-4}}{3} - t$$

د. نجد قيمة t الّتي بالنّسبة لها يكون مَجموع طولَي القطعتَيْن AB وَ AC أكبَر ما يُمكن

$$AC=\frac{6+2\sqrt{t^2-4}}{3}-t=2+\frac{2}{3}2\sqrt{t^2-4}-t$$

$$AC=\frac{2}{3}2\sqrt{t^2-4}+2-t$$

$$AB=2\sqrt{t^2-4}-3t+6$$

دالّة الهدف هي $AB+AC$:

$$f(t)=AB+AC=2\sqrt{t^2-4}-3t+6+\frac{2}{3}2\sqrt{t^2-4}+2-t$$

$$f(t)=\frac{8}{3}\sqrt{t^2-4}-4t+8$$

لإيجاد قيمة t، نشتقّ الدالّة ونساويها لصفر:

$$f'(t)=\frac{8}{3}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-4}}-4$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-4}}-4=0$$

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2-4}}=4 \quad /\cdot\frac{3}{8}$$

$$\frac{2t}{2\sqrt{t^2-4}}=\frac{12}{8}$$

$$24\sqrt{t^2-4}=16t \quad \text{نربّع}$$

$$576(t^2-4)=256t^2$$

$$576t^2-2304=256t^2$$

$$320t^2=2304$$

$$t^2=7.2$$

$$t=2.68$$

نفحص الإجابة إذا كانت بالفعل أكبر ما يمكن