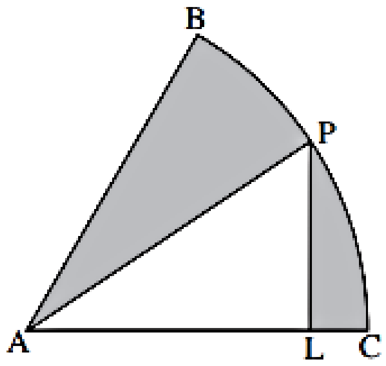
قيمة قُصوى – شتاء 2017

سؤال 8:

معطى قطاع دائرة BAC الذي هو عبارة عن $\frac{1}{6}$ دائرة نصف قطرها R ومركزها A .



من نقطة ما P ، تقع على القوس BC ،

أنزلوا عمودًا على AC يقطع نصف القطر AC

في النقطة L (انظر الرسم).

المساحة الرماديّة في الرسم هي المساحة المحصورة

بين القوس BC ونصفَي القطر AB وَ AP

والقطعتين LP وَ LC .

معطى أنّ أصغر قيمة ممكنة للمساحة الرماديّة هي $24\pi - 36$.

أ. (1) جد الزاوية PAC التي بالنسبة لها تكون المساحة الرماديّة المتكوّنة هي أصغر ما يمكن.

(2) جد R .

ب. ما هي أكبر مساحة ممكنة للمثلّث APL؟ علّل.

أ)

(1)

لتكون المساحة الرماديَّة أقل ما يمكن على المساحة البيضاء أن تكون أكبر ما يمكن، ولهذا نجد الزاوية $\sphericalangle PAC$ التي بالنسبة لها $S_{\Delta APL}$ أكبر ما يمكن .

مساحة المُثلَّث APL:

$$S_{\Delta APL} = \frac{AP \cdot AL \cdot \sin(\sphericalangle PAL)}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle PAL = x \quad \longrightarrow \quad \sphericalangle APL = 90 - x \\ AP = R \end{matrix}\right\}$$

(قانون السينوس)

$$\frac{AP}{\sin(\sphericalangle ALP)} = \frac{AL}{\sin(\sphericalangle APL)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R}{\sin(90)} = \frac{AL}{\sin(90 - x)}$$

$$\Downarrow$$

$$R \cdot \sin(90 - x) = AL$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R \cdot \cos(x) = AL}$$

$$\left(\begin{matrix} AL = R \cdot \cos(x) \\ AP = R \\ \sphericalangle PAL = x \end{matrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\Delta APL} = \frac{AL \cdot AP \cdot \sin(\sphericalangle PAL)}{2} = \frac{R \cdot \cos(x) \cdot R \cdot \sin x}{2} = \frac{R^2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{2}$$

نُعرّف $f(x)$:

$$f(x) = \frac{R^2}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\downarrow$$

$$f'(x) = -\frac{R^2}{2} \sin x \cdot \sin x + \frac{R^2}{2} \cdot \cos x \cdot \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = -\frac{R^2}{2}(\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = -\frac{R^2}{2}(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

<u>نُساوي المُشتقَّة لصفر لنجد النِّقاط القُصوى:</u>

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{R^2}{2}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{-\frac{R^2}{2}}_{\text{ثابت}}\underbrace{(\sin x + \cos x)}\underbrace{(\sin x - \cos x)} = 0$$

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = -\sin(90 - x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \sin\big(360 - (90 - x)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \sin(270 + x)$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = \sin(90 - x)$$

$$\sin x = \sin(90 - x) \Downarrow x = 90 - x + 360k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Downarrow 2x = 90 + 360k \Downarrow x = 45 + 180k$$

$$\sin x = \sin(270 + x) \Downarrow x = 270 + x + 360k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Downarrow 0 = 270 + 360k \Downarrow \emptyset$$

$$0 < x < 60 \Downarrow x = 45$$

الان، نتأكَّد أنَّ في $x = 45$ يوجد نُقطة قُصوى max :

x		0		45		60	
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(40) = -\frac{R^2}{2}(\sin 40 + \cos 40)(\sin 40 - \cos 40) \longrightarrow (-)\cdot(+)\cdot(-) \longrightarrow (+) \\ f'(50) = -\frac{R^2}{2}(\sin 50 + \cos 50)(\sin 50 - \cos 50) \longrightarrow (-)\cdot(+)\cdot(+) \longrightarrow (-) \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = 45^\circ}$$

(2)

$$\{\text{المساحة الكُليَّة}\} - \{\text{المساحة البيضاء القُصوى}\} = \{\text{المساحة الرماديَّة الدُنيا}\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \{\text{المساحة الكُليَّة}\} = \dfrac{R^2 \cdot \pi}{6} \\ \{\text{المساحة البيضاء القُصوى}\} = f(45^\circ) \\ \{\text{المساحة الرماديَّة الدُنيا}\} = 24\pi - 36 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R^2 \cdot \pi}{6} - f(45^\circ) = 24\pi - 36$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R^2 \cdot \pi}{6} - \frac{R^2}{2} \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ = 24\pi - 36$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R^2 \cdot \pi}{6} - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = 24\pi - 36$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R^2 \cdot \pi}{6} - \frac{R^2}{4} = 24\pi - 36$$

$$\Downarrow$$

$$R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\right) = 24\pi - 36$$

$$\Downarrow$$

$\div \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\right)$

$$R^2 = \frac{24\pi - 36}{\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}}$$

$$\Downarrow$$

$$R^2 = 144$$

$$\Downarrow$$

$$R = \pm 12$$

(R موجب)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = 12}$$

ب)

كما برهنًا سابقا أكبر مساحة ممكنة للمثلّث ΔAPL هي $f(45°)$.

$$f(x) = \frac{R^2}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x \longrightarrow f(45°) = \frac{R^2}{2} \cdot \cos 45° \cdot \sin 45°$$

$$\longrightarrow f(45°) = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{R=12} f(45°) = \frac{12^2}{4} = 36$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{36}$$