إيهاب عمر

دوال مثلثيّة – صيف 2018 موعد (ب)

سؤال 7 :

معطاة الدالّة $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

أ. ما هو مجال تعريف الدالّة $f(x)$ ؟

أجب عن البنود "ب – هـ" بالنسبة للمجال $x \ge \frac{2}{7}$.

ب. جد إحداثيّات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x .

جـ. جد إحداثيّات النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدّد نوع هذه النقاط.

د. يوجد للدالّة $f(x)$ خطّ تقارب أفقيّ. جد معادلة خطّ التقارب الأفقيّ للدالّة $f(x)$.

هـ. ارسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

أجب عن البند "و" بالنسبة للمجال $x>0$.

و. ننظر إلى نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x .

أمامك 3 ادّعاءات (i-iii)، واحد منها صحيح. أيّ ادّعاء هو الصحيح؟ علّل.

i) كلّما اقتربنا من $x=0$ ، أخذ البُعد بين نقطتَي تقاطع متجاورتين بالصغر.

ii) البُعد بين كلّ نقطتَي تقاطع متجاورتين يبقى ثابتًا.

iii) كلّما اقتربنا من $x=0$ ، أخذ البُعد بين نقطتَي تقاطع متجاورتين بالكبر.

أ)

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x \neq 0}$$ (المقام لا يُساوي صفر)

ب)

$$f(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\pi}{x} = \pi k \xrightarrow{\cdot\, x} \pi = x \cdot \pi k \xrightarrow{\div\, \pi k} x = \frac{\pi}{\pi k} \longrightarrow x = \frac{1}{k}$$

مُلاحظة :
k لا يُساوي صفر لأن x غير مُعرَّف في هذه الحالة .

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{k} \\ x &\geq \frac{2}{7} \end{aligned} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{k} \geq \frac{2}{7}$$

$$\Downarrow$$

<u>نعوض</u>

$k = 1 \rightarrow 1 \geq \frac{2}{7}$ ✓

$k = 2 \rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{2}{7}$ ✓

$k = 3 \rightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{2}{7}$ ✓

$k = 4 \rightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{2}{7}$ ✗

$k = -1 \rightarrow -1 \geq \frac{2}{7}$ ✗

$$\Downarrow$$

$$x = 1 \ , \quad x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(1,0) \ , \quad \left(\frac{1}{2},0\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{3},0\right)}$$

ج)

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{x^2}\right)$$

نُساوي المُشتقَّة لصفر لنجد النُقاط القُصوى :

$$f'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{x^2}\right) = 0 \xrightarrow{\cdot\left(\frac{-x^2}{\pi}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 \longrightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k \xrightarrow{\div\pi} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + k$$

$$\xrightarrow{\cdot\left(\frac{x}{\frac{1}{2}+k}\right)} \frac{1}{\frac{1}{2}+k} = x$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{2}+k} = x & (k \in \mathbb{Z}) \\ x \geq \frac{2}{7} & (\text{مُعطى}) \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+k} \geq \frac{2}{7}$$

$$\Downarrow \cdot\left(\frac{1}{2}+k\right)^2$$

$$\frac{1}{2} + k \geq \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}+k\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} + k \geq \frac{2}{7}\cdot\left(k^2 + k + \frac{1}{4}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \geq \frac{2}{7}k^2 - \frac{5}{7}k - \frac{6}{14}$$

$$\Downarrow \cdot 7$$

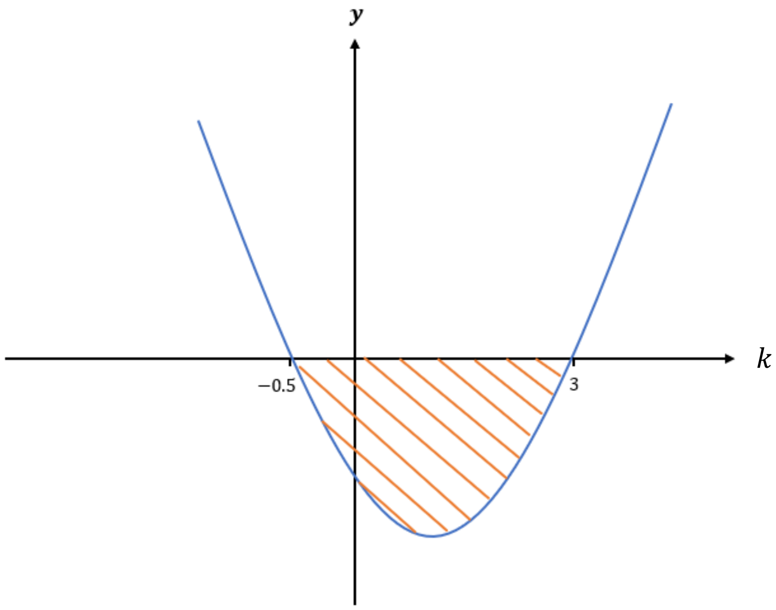
$$0 \geq 2k^2 - 5k - 3$$

$$\Downarrow$$

$$0 \geq (2k+1)\cdot(k-3)$$

$$\downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = (2k+1)\cdot(k-3) \\ \Downarrow \\ k = 3 \quad , \quad k = -0.5 \end{array} \right\}$$



كما هو واضح من الرسم البياني , الدَّالّة سالبة أو تُساوي صفر في المجال $-0.5 \leq k \leq 3$.

بما أنَّ k عدد صحيح , ينتُج أنَّ :

$$k = 0 \quad , \quad k = 1 \quad , \quad k = 2 \quad , \quad k = 3$$

$$\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$$

$$x = 2 \quad , \quad x = \frac{2}{3} \quad , \quad x = \frac{2}{5} \quad , \quad x = \frac{2}{7}$$

x		$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\left\{\begin{array}{c} f'(0.3) = \cos\left(\frac{\pi}{0.3}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{0.3^2}\right) \longrightarrow \frac{50\pi}{9} \longrightarrow (+) \\ f'(0.6) = \cos\left(\frac{\pi}{0.6}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{0.6^2}\right) \longrightarrow \frac{-25\pi}{18} \longrightarrow (-) \\ f'(0.5\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{0.5\pi}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{(0.5\pi)^2}\right) \longrightarrow 0.529 \longrightarrow (+) \\ f'(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{\pi}\right)\cdot\left(\frac{-\pi}{(\pi)^2}\right) \longrightarrow -0.1719 \longrightarrow (-) \end{array}\right\}$$

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{7}}\right) = -1 \longrightarrow \left(\frac{2}{7}, -1\right) min$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{5}}\right) = 1 \longrightarrow \left(\frac{2}{5}, 1\right) max$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right) = -1 \longrightarrow \left(\frac{2}{3}, -1\right) min$$

$$f(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \longrightarrow (\,2\,,1\,) max$$

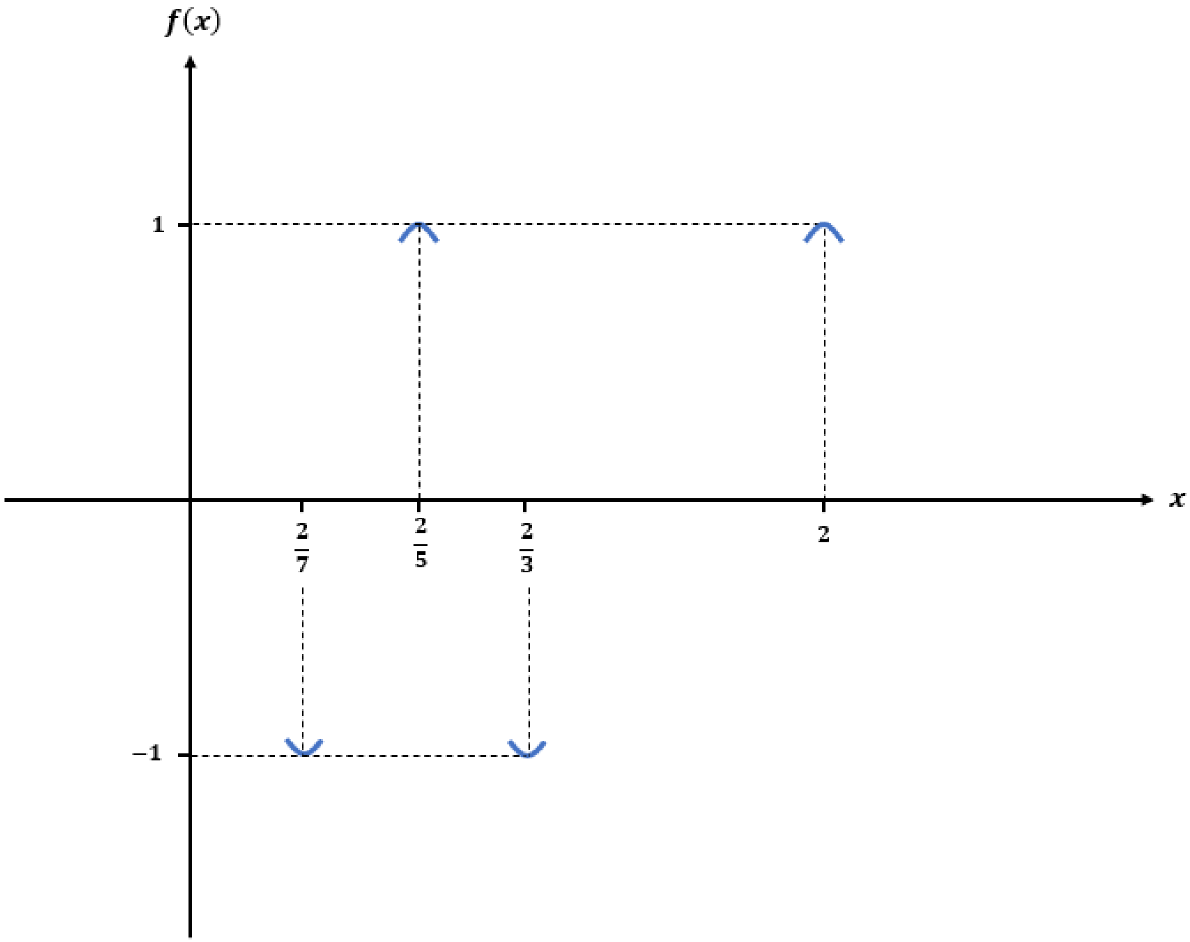
د)

الدَّالَّة $f(x)$ مُعرَّفة في المجال $x \geq \frac{2}{7}$. ولهذا يمكننا الاستنتاج أنَّ خط التقارُب الأُفقي سيكون بال $+\infty$.

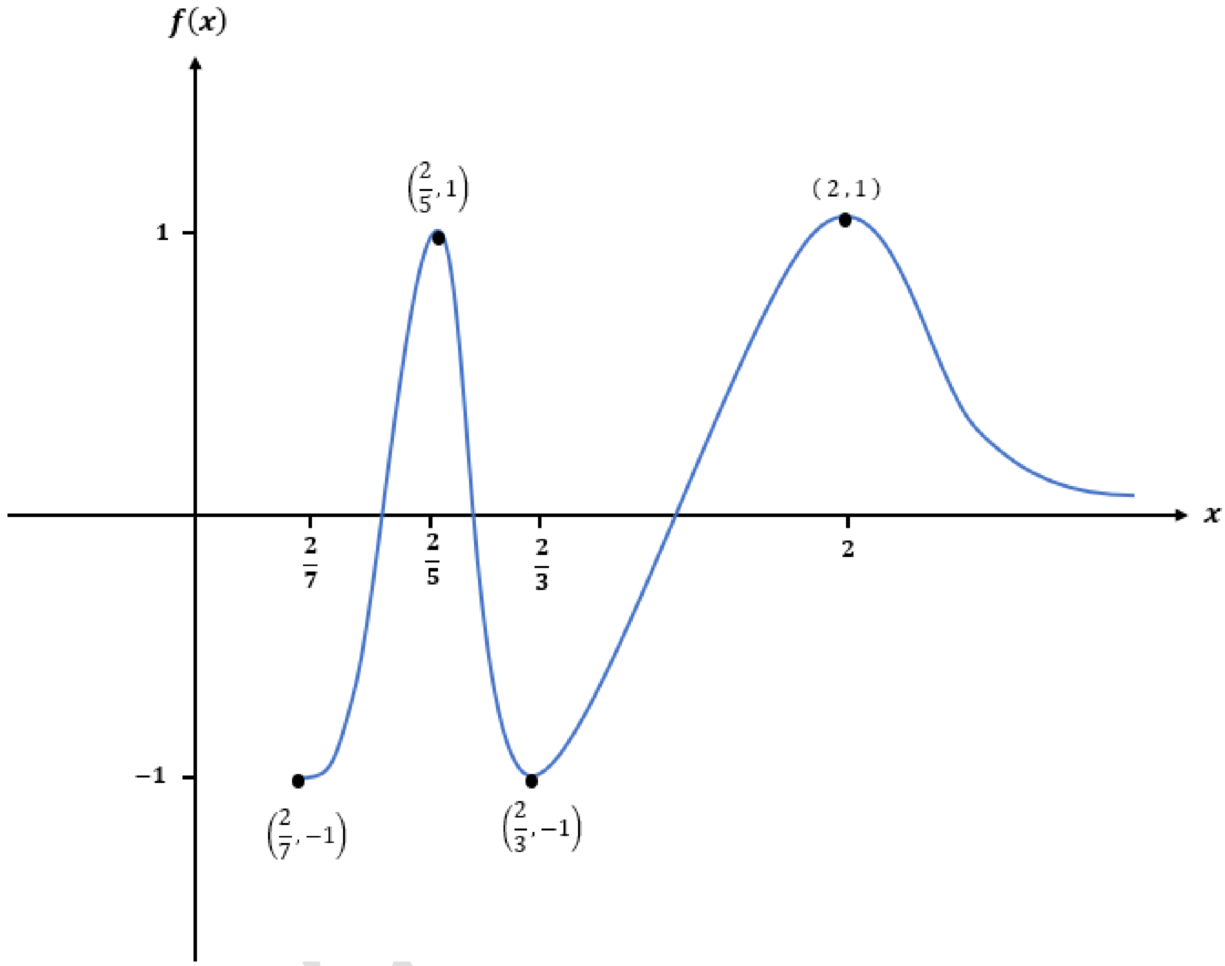
$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;\longrightarrow\; \lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0}$$

ه)

<u>أوَّلاً , نرسُم هيكل الدَّالَّة :-</u> (نضع المُعطيات على هيئة المحاور)



الان , نرسُم الدَّالَّة :



و)

كما وجدنا في الفرع "ب" نُقاط تقاطُع الدَّالَّة مع المحور x هي $\left(\frac{1}{k},0\right)$ بحيث أنَّ k عدد صحيح لا يُساوي صفر .

بسبب أنَّ $x>0$ كما هو مُعطى في السُؤال ينتُج أنَّ k عدد صحيح أكبر من صفر .

البُعْد بين نُقطة التقاطُع $(1,0)$ عندما $k=1$ و نُقطة التقاطُع $\left(\frac{1}{2},0\right)$ عندما $k=2$ هو $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

البُعْد بين نُقطة التقاطُع $\left(\frac{1}{5},0\right)$ عندما $k=5$ و نُقطة التقاطُع $\left(\frac{1}{4},0\right)$ عندما $k=4$ هو $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$.

نستنتج من ذلك أنَّهُ كُلَّما اقتربنا من $x = 0$ البُعد بين نُقطتا التقاطُع المتجاورتين يَقِل أي أنَّ الادّعاء الصحيح هو الادِّعاء (i) .

يُمكن برهنة ذلك أيضاً .